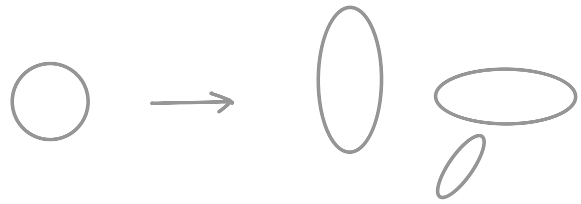
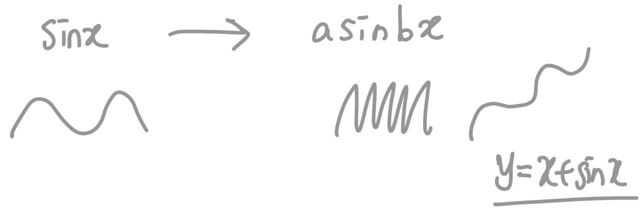
§ 线性变换的定义与性质.

中学图形的伸缩变换：



例：$(x,y)\mapsto(k_1x,k_2y)$



伸缩变换的基本特征：① 保持直线

② 且将平行直线变为平行直线

$\mathscr{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 满足 ① ② $\Rightarrow$ $\mathscr{A}(\lambda P_1+\mu P_2)=\lambda\mathscr{A}(P_1)+\mu\mathscr{A}(P_2)$

推广：伸缩变换 $\Rightarrow$ 线性变换

定义： V, V' = F-线性空间. 若映射 $\mathscr{A}: V\to V'$ 满足

1) $\forall x,y\in V$, $\mathscr{A}(x+y)=\mathscr{A}(x)+\mathscr{A}(y)$

2) $\forall x\in V$, $\forall\lambda\in F$, $\mathscr{A}(\lambda x)=\lambda\mathscr{A}(x)$.

则称 $\mathscr{A}$ 为从 V 到 V' 的**线性映射**. 特别地，若 $V=V'$，则称 $\mathscr{A}$ 为 V 上的一个**线性变换**.

注： 本课程仅讨论线性变换.

例：1) 单位变换（恒等变换） $\mathcal{E}: V \to V$
$x \mapsto x$

2) 零变换： $\mathcal{E}: V \to V$
$x \mapsto 0$

3). 微分算子： $\mathcal{A}: F_n[x] \to F_n[x]$
$p(x) \mapsto \frac{d}{dx} p(x)$

4). $C[a,b]$ = 闭区间 $[a,b]$ 上所有实值连续函数集合

$$\mathcal{A}: C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$\mathcal{A}(f)(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt$$

其中 $K(x,t)$ 为 $[a,b]\times[a,b]$ 上的实值连续函数.

5). $V :=$ $[a,b]$ 上的函数集合.

$\mathcal{A}: V \to V$ $\qquad \mathcal{A}(f)(x) = (1-x)f(a) + x f(b)$

6). $A \in F^{n\times n}$, $\mathcal{A}: F^n \to F^n$ $\qquad \mathcal{A}(x) := Ax$ 列向量

特别地：$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$ 单位变换，$\Updownarrow$ 零变换，$\Updownarrow$ 伸缩，$\Updownarrow$ 旋转，$\Updownarrow$ 反射，$\Updownarrow$ 投影

7). $\mathcal{A}: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ $\qquad \mathcal{A}(x,y,z) = (x^2, xy, z^2)$ $\qquad$ (反例)

8). $\mathcal{A}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad z \mapsto \bar{z}$. $\quad \mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}$-线性，但不是 $\mathbb{C}$-线性的！

9). $\mathscr{A}: F^n \to F^n$ $\quad \mathscr{A}(x_1,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0)$

10). $\mathscr{A}: F^n \to F^n$ $\quad \mathscr{A}(x_1,\cdots,x_n) = (x_n, x_{n-1},\cdots,x_1)$

11) $\mathscr{A}: F^{n\times n} \to F^{n\times n}$ $\quad \mathscr{A}(X) = AXB$ 其中 $A,B\in \mathbb{C}^{n\times n}$

性质：$V = F$-线性空间，$\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换，则

1) $\mathscr{A}(0) = 0$

2) $\mathscr{A}(-\alpha) = -\mathscr{A}(\alpha) \quad \forall \alpha\in V$

3) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，若 $\alpha = \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n$，则

$$\mathscr{A}(\alpha) = \lambda_1\mathscr{A}(\alpha_1)+\lambda_2\mathscr{A}(\alpha_2)+\cdots+\lambda_n\mathscr{A}(\alpha_n).$$

即 $\mathscr{A}$ 由 $\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的像唯一决定.

4) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)$ 线性相关.

即 $\mathscr{A}$ 保持线性相关. 特别的 3维情形. 共线 $\mapsto$ 共线，共面 $\mapsto$ 共面

注：1) 上面性质对线性映射也成立.

2) 若 4) 中的 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关呢？

证：1) $\mathscr{A}(0) = \mathscr{A}(0)+\mathscr{A}(0) \Rightarrow \mathscr{A}(0)=0$

2) $\mathscr{A}(-\alpha)+\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{A}(-\alpha+\alpha) = \mathscr{A}(0) = 0 \Rightarrow \mathscr{A}(-\alpha) = -\mathscr{A}(\alpha)$.

3). 显然

4). $\Rightarrow$ $\exists$ 不全为零的 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ s.t. $\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i = 0$

$\Rightarrow 0 = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mathscr{A}(\alpha_i)$

$\Rightarrow \mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)$ 线性相关.

§6.2. 线性变换的矩阵

$V=$ n 维 F-线性空间

$\mathscr{A}: V\to V$ 线性变换

取定 V 的一组基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

$\forall i,\ \mathscr{A}(\alpha_i)\in V \Rightarrow \forall i\ \exists a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni}\in F$ s.t.

$$\mathscr{A}(\alpha_i)=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\cdots+a_{ni}\alpha_n.$$

$$\overset{\text{改写}}{\Longrightarrow} \big(\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)\big)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

并不是数量矩阵，但乘法有意义.

记 $\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n):=\big(\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)\big)$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

↑ 线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵

注：① A 由 $\mathscr{A}$ 及基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 唯一确定.

② A 的第 j 列为 $\mathscr{A}(\alpha_j)$ 在 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 下的坐标.

例：任给 $A\in F^{n\times n}$ 定义 F^n 上线性变换 $\mathscr{A}: F^n\to F^n$ $x\mapsto Ax$.

则 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵为 A.

证：$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n):=(\mathscr{A}e_1,\cdots,\mathscr{A}e_n):=(Ae_1,\cdots,Ae_n)=A(e_1,\cdots,e_n)$

$$=A\cdot I_n=A=I_n\cdot A=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\cdot A \quad \square$$

例: $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in V=F^{2\times 2}$ $\forall M\in V$ $\mathscr{A}M:=AM$.

求 $\mathscr{A}$ 在 $e_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $e_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $e_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵

解: $A\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}=e_{11}+3e_{21}$ $\quad A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}=e_{12}+3e_{22}$

$A\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}=2e_{11}+4e_{21}$ $\quad A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}=2e_{12}+4e_{22}$

$$\Rightarrow \mathscr{A}(e_{11},e_{12},e_{21},e_{22})=(e_{11},e_{12},e_{21},e_{22})\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\1&0&4&0\\0&3&0&4\end{pmatrix}$$